Profesor:
Fortunato Mendoza

PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

NÚMEROS RACIONALES

NÚMEROS N-AVALES

NÚMEROS N-AVALES

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS N-AVALES

$$f = \frac{A}{B} \begin{cases} \text{Exacto} \\ \text{Periódico Puro} \\ \text{Periódico Mixto} \end{cases}$$

I. NÚMERO N-AVAL EXACTO

Ejemplos:

En base 10 = 2.5

$$\begin{cases} \dfrac{7}{2^3} = 0{,}875 \\ \dfrac{4}{5^2} = 0{,}16 \\ \dfrac{417}{2^5 \cdot 5^3} = 0{,}10425 \end{cases}$$

↳ pte. decimal

Aplicaciones:

$$fpI = \frac{k}{2^3 \times 5^4} = 0{,}abcd$$

$$fpI = \frac{k}{2^6 \times 5^3} = 0{,}abcdef$$

$$fp = \frac{13000}{2^{18} \times 5^{10}} = \frac{13 \times 2^3 \times 5^3}{2^{18} \times 5^{10}}$$

$$fp = \frac{13}{2^{15} \times 5^7} = 0{,}\underbrace{ab\ldots x}_{15 \text{ cifras}}$$

En base 6 = 2.3

$$\begin{cases} \dfrac{5}{2^4} = 0{,}abcd_{(6)} \\ \dfrac{4}{3^3} = 0{,}abc_{(6)} \\ \dfrac{13}{2^3 \cdot 3^4} = 0{,}mnpq_{(6)} \end{cases}$$

II. NÚMERO N-AVAL PERIÓDICO PURO

Ejemplos:

En base 10

* $\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$ → Periodo

OBS.:

$$\begin{array}{r|l} 99 & 11 \\ \hline - & 9 \end{array}$$

* $\frac{4}{27} = 0,\overline{148}$

OBS.:

$$\begin{array}{r|l} 999 & 27 \\ \hline - & 37 \end{array}$$

Tabla de los "nueves"

$9 = 3^2$

$99 = 3^2 \times 11$

$999 = 3^3 \times 37$

$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$

$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$

$999\ 999 = 3^3 \times 11 \times 37 \times 7 \times 13$

Aplicaciones:

$fpI = \frac{k}{37} = 0,\overline{abc}$

$fpI = \frac{k}{101} = 0,\overline{abcd}$

$fpI = \frac{k}{41} = 0,\overline{abcde}$

$fpI = \frac{k}{7} = 0,\overline{abcdef}$

$555_{(6)} = 215$

$5 \lfloor 7$ ×

$55_{(6)} = 35$

En base 6 $(6 = 2 \times 3)$

* $\frac{1}{7} = 0,\overline{ab}_{(6)}$

$$\begin{array}{r|l} 55_{(6)} & 7 \\ \hline - & 5 \end{array}$$

* $\frac{27}{43} = 0,\overline{abc}_{(6)}$

$$\begin{array}{r|l} 555_{(6)} & 43 \\ \hline - & 5 \end{array}$$

III. PARA NÚMEROS N-AVALES PERIÓDICOS MIXTOS

Ejemplos:

En base 10

* $\frac{23}{2^{3}.11} = 0{,}261\overline{36}$ Pte. periódica; Pte. no periódica

* $\frac{47}{5^{2}.27} = 0{,}06\overline{962}$

* $\frac{193}{2^{4}.5^{2}.11} = 0{,}043\overline{863}$

NOTA

$$f_{PI} = \frac{k}{2^{3}\times 5^{4}\times 13\cdot 41} = 0{,}abcd\overbrace{\qquad}^{30\text{ cifras}}$$

$$\mathrm{mcm}(6;5) = 30$$

Aplicaciones:

$$f_{PI} = \frac{k}{2^{3}\times 5^{6}\times 41} = 0{,}abcdef\overbrace{xyzwr}$$

$$f_{PI} = \frac{k}{2^{4}\times 5^{3}\times 13} = 0{,}abcd\overbrace{xyzwrt}$$

$$f_{PI} = \frac{k}{2^{1}\times 5^{2}\times 101} = 0{,}ab\overbrace{xyzw}$$

En base 6 $(6 = 2\times 3)$

* $\frac{19}{2^{3}.7} = 0{,}abc\overline{mn}_{(6)}$ Obs $55_{(6)}$ $\begin{array}{l|l} 7 & \\ \hline 5 & 0 \end{array}$

* $\frac{71}{2^{2}.3.43} = 0{,}ab\overline{xyz}_{(6)}$ Obs $555_{(6)}$ $\begin{array}{l|l} 43 & \\ \hline 5 & 0 \end{array}$

CONVERSIÓN DE N-AVAL A FRACCIÓN

Caso 1: Para n-aval exacto

Ejemplos:

En base 10

* $0{,}435 = \dfrac{435}{1\,000}$

* $0{,}2658 = \dfrac{2658}{10000}$

En base ≠ 10

* $0{,}2134_{(6)} = \dfrac{2134_{(6)}}{10000_{(6)}}$

* $0{,}451_{(8)} = \dfrac{451_{(8)}}{1000_{(8)}}$

Caso 2: Para n-aval periódico puro

Ejemplos:

En base 10

* $0{,}\overline{421} = \dfrac{421}{999}$

* $0{,}\overline{2568} = \dfrac{2568}{9999}$

En base ≠ 10

* $0{,}\overline{3121}_{(6)} = \dfrac{3121_{(6)}}{5555_{(6)}}$

* $0{,}\overline{461}_{(8)} = \dfrac{461_{(8)}}{777_{(8)}}$

Caso 3: Para n-aval periódico mixto

Ejemplos:

En base 10

* $0,182\overline{73} = \dfrac{18273 - 182}{99000} = \dfrac{18091}{99000}$

* $0,25\overline{678} = \dfrac{25678 - 25}{99900} = \dfrac{25653}{99900}$

En base ≠ 10

* $0,23\overline{431}_{(6)} = \dfrac{23431_{(6)} - 23_{(6)}}{55500_{(6)}}$

* $0,2\overline{53}_{(8)} = \dfrac{253_{(8)} - 2_{(8)}}{770_{(8)}}$

Casos Particulares:

* $4,2\overline{58} = \dfrac{4258 - 42}{990} = \dfrac{4216}{990}$

* $2,\overline{678} = \dfrac{2678 - 2}{999} = \dfrac{2676}{999}$

DESCOMPOSICIÓN DE LOS NÚMEROS N-AVALES

$$0{,}abcd = \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}$$

$$0{,}abcd_{(n)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \frac{d}{n^4}$$

$$0{,}\overline{34} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \dots$$

$$0{,}\overline{21}_{(5)} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

$$0{,}4\overline{23}_{6} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{2}{6^4} + \frac{3}{6^5} + \dots$$

Aplicación:

Calcular

$$E = \frac{2}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{5}{7^4} + \dots$$

Resolución

$$E = 0{,}\overline{25}_{(7)}$$

$$E = \frac{25_{(7)}}{66_{(7)}} = \frac{19}{48}$$

NOTA

$$2{,}\overline{35}_{(8)} = 2 + 0{,}\overline{35}_{(8)} = 2 + \frac{3}{8} + \frac{5}{8^2} + \dots$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

PROBLEMAS

01. ¿Cuántas cifras tiene la parte periódica en el desarrollo decimal de la fracción

$$\frac{1}{3861}?$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

Resolución:

$$\frac{1}{3861} = \frac{1}{3^3 \times 11 \times 13}$$

Como $999999 = 3^3 \times 11 \times 37 \times 7 \times 13$

$$\rightarrow \frac{1}{3861} = 0,\overline{abcdef}$$

RPTA: 6

02. Cuántas cifras en la parte no periódica tiene la siguiente fracción: 125/N, si:

$$N = \underbrace{3000\ldots00}_{121\text{ cifras}}{}_{(5)}$$

A) 117 B) 90 C) 121
D) 120 E) 128

$N = 3 \times 5^{120}$

Resolución:

$$f = \frac{125}{N} = \frac{5^3}{3 \times 5^{120}}$$

$$f_I = \frac{1}{3 \times 5^{117}} \rightarrow \text{DPM}$$

Pte. no periódica: 117 cf

03. ¿Cuál es la última cifra del número decimal originado por la fracción: $\frac{7}{5^{20!}}$?

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 7

Resolución:

Sea $f = \frac{7 \times 2^{20!}}{5^{20!} \times 2^{20!}} = \frac{7 \times 2^{20!}}{10^{20!}}$

Obs $2^4 = 16 \rightarrow 2^{4n} = \ldots 6 \rightarrow 2^{20!} = \ldots 6$

$f = \frac{7(\ldots 6)}{10^{20!}} = \frac{\ldots 2}{10^{20!}} = 0,\underbrace{\ldots\ldots 2}_{20!\ cfs}$

RPTA: 2

05. ¿Cuántas cifras origina en la parte no periódica del decimal originado por la fracción: $F = \frac{13}{50! - 30!}$?

A) 7 B) 26 C) 27
D) 12 E) 20

Resolución:

$F = \frac{13}{50! - 30!} = \frac{13}{30! \times 31 \times 32 \times \ldots \times 50 - 30!}$

$F = \frac{13}{30!(31 \times 32 \times \ldots \times 50 - 1)} = \frac{13}{30!(\ldots 9)}$

30 | 2 → 15 | 2 → 7 | 2 → 3 | 2 → 1

30 | 5 → 6 | 5 → 1

$F = \frac{13}{\underbrace{2^{26} \times 5^{7}}\, Q(\ldots 9)}$

∴ Pte. no periódica: 26 cfs

04. Al dividir un número entre 27, 81 y 2 se obtiene un entero, un decimal periódico puro y un decimal exacto, respectivamente. ¿Qué tipo de decimal se obtiene al dividirlo entre 972?

A) No periódico
B) Periódico
C) Exacto
D) Periódico puro
E) Periódico mixto

Resolución:

Sea N el #entero

$\frac{N}{27} = k$ ← #ent $\rightarrow N = 27k$

$\frac{N}{81} = DPP \rightarrow \frac{27k}{81} = \frac{k}{3} \rightarrow k \neq \overset{\circ}{3}$

$\frac{N}{2} = D.E \rightarrow \frac{27k}{2} = D.E \rightarrow k \neq \overset{\circ}{2}$

Luego

$\frac{N}{972} = \frac{27k}{2^2 \cdot 3^5} = \frac{k}{2^2 \cdot 3^2} = 0,abc$

Rpta: Periódico mixto

06. Si se cumple que:

$$\frac{0,[ab] + 0,[bc] + 0,[ca]}{0,[abc]} = 4,[1]$$

determinarel mínimo valor de a.b.c

A) 24 B) 12 C) 48

D) 36 E) 25

Resolución:

$$\frac{0,\overline{ab} + 0,\overline{bc} + 0,\overline{ca}}{0,\overline{abc}} = 4,\overline{1}$$

$$\frac{\frac{\overline{ab}}{99} + \frac{\overline{bc}}{99} + \frac{\overline{ca}}{99}}{\frac{\overline{abc}}{999}} = \frac{41-4}{9}$$

$$\cancel{9}^{1}\left(\frac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{\cancel{99}_{11}}\right) = \frac{\overline{abc}}{\cancel{999}_{27}} \cdot \cancel{37}^{1}$$

$$\overline{abc} = 27(a+b+c)$$

Obs $\overline{abc} = \overset{\circ}{9} \rightarrow a+b+c = \overset{\circ}{9} = \begin{cases} 9 \\ 18 \\ 27 \end{cases}$

Si $a+b+c=9 \rightarrow \overline{abc} = 243$

$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

Si $a+b+c=18 \rightarrow \overline{abc} = 486$

$a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 8 \cdot 6 = 192$

Si $a+b+c=27 \rightarrow \overline{abc} = 729$ ✗

$\therefore$ RPTA: 24

07. Sabiendo que:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots}_{\text{n fracciones}} = 0,[96]$$

Calcular "n"

A) 26 B) 32 C) 27

D) 8 E) 20

Resolución:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = 0,\overline{96}$$

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cancel{\cdots}+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{96}{99}$$

$$1-\frac{1}{n+1}=\frac{96}{99} \rightarrow \frac{n}{n+1}=\frac{32}{33}$$

$$\therefore\ n=32$$

$$\frac{1}{5\times 6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

08. Determinar una fracción equivalente a $0,\widehat{2}$ cuyo numerador esté comprendido entre 15 y 35 y su denominador entre 50 y 75. Dar como respuesta la suma de sus términos.

A) 88 B) 55 C) 44
D) 99 E) 22

Resolución:

Sea $f = 0,\widehat{2} = \frac{2}{9} \rightarrow f_E = \frac{2k}{9k}$

$\left.\begin{array}{l} * \ 15 < 2k < 35 \\ * \ 50 < 9k < 75 \end{array}\right\} \ k = 8$

Piden $11k = 11(8) = 88$

09. Determine la suma de las dos últimas cifras del periodo originado por la fracción 8/23

A) 9 B) 6 C) 4
D) 8 E) 10

Resolución:

$\frac{8}{23} = 0,\overset{\frown}{ab\ldots xy}$

$\frac{8}{23} = \frac{\overline{ab\ldots xy}}{99\ldots99}$

$\ldots\ldots 92 = 23 \times \overline{ab\ldots xy}$

$\begin{array}{r} \overset{1}{\overline{xy}} \\ \times \ \overline{23} \\ \hline \ldots 12 \\ \ldots 8 \\ \hline \ldots 92 \end{array}$

Obs $y = 4$

$x = 0$

Piden $x + y = 4$

10. Encontrar la fracción propia e irreductible de denominador 125, tal que en su desarrollo como número decimal, cada cifra excede en dos unidades a la cifra que está a su derecha. De como respuesta la suma de cifras del numerador.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

Resolución:

Sea $fpI = \frac{N}{125} = 0,(a+4)(a+2)a$

$\frac{N}{125} = \frac{\overline{(a+4)(a+2)a}}{1000} \rightarrow 8N = \overline{(a+4)(a+2)a} = 8$

$7a + 20 = 8 \rightarrow a = 4 \rightarrow 8N = 864$

$N = 108 \rightarrow \Sigma cfs = 9$

11. Si: $\frac{a}{\overline{ba}} = 0,[mnp]$, además

$\frac{1}{\overline{c(b-2)d}} = 0,[wxy3]$

calcule: a + b + c + d

A) 10 B) 15 C) 13
D) 18 E) 20

Resolución:

$\frac{a}{\overline{ba}} = 0,\overline{mnp}$; $\frac{1}{\overline{c(b-2)d}} = 0,\overline{wxy3}$

$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$

$\frac{1}{\overline{c(b-2)d}} = \frac{\overline{wxy3}}{9999}$

$0 \leq \overline{ba} = \begin{cases} 27 \\ 37 \end{cases}$

$* \ \overline{c(b-2)d} = 101 \times 3 = 303 \rightarrow c = 3$, $b = 2$, $d = 3$

Luego $a = 7$

$\therefore a + b + c + d = 15$

12. Si:

$$\frac{1}{A+T} = 0,\widehat{1} \text{ y } \frac{A}{T} = 0,\overline{ARITMEARITME\ldots}$$

calcular: T - A

A) 3 B) 5 C) 7
D) 2 E) 4

Resolución:

$\times \frac{1}{A+T} = \frac{1}{9} \rightarrow A+T=9 \quad \ldots (1)$

$\times \frac{A}{T} = 0,\widehat{ARITME} \rightarrow T=7$

En (1) $A=2$

$\therefore T-A=5$

13. Los dos términos de una fracción propia irreductible suman 336. Además el número decimal generado por la fracción, posee dos cifras no periódicas y dos cifras periódicas. Señale la suma de cifras del numerador.

A) 7 B) 9 C) 12
D) 14 E) 16

Resolución:

Sea $fPI = \frac{A}{B} = 0,ab\widehat{cd}$

$A+B=336 \ldots (1)$ Obs $336 = 2^4 \times 3 \times 7$

A y B son PESI $\rightarrow B \neq \overset{\circ}{2}; \overset{\circ}{3}; \overset{\circ}{7}$

Obs $B = 5^2 \times 11 \rightarrow B = 275$

En (1) $A+275=336$

$A=61 \rightarrow$ Cifras $=7$

14. Si se cumple: $\overline{aba},[213]_{(5)} = \overline{cdef},ba\ldots_{(4)}$.

Calcule: a + b + c + d + e + f

A) 8 B) 11 C) 10

D) 9 E) 12

Resolución:

$aba,\widehat{213}_{(5)} = cdef,ba\ldots_{(4)}$

Se cumple

$\overline{aba}_{(5)} = \overline{cdef}_{(4)}$ ...(1)

$0,\widehat{213}_{(5)} = 0,ba\ldots_{(4)}$ ...(2)

De (2) $0,\widehat{213}_{(5)}$ a base 4

$0,\widehat{213}_{(5)} = \dfrac{213_{(5)}}{444_{(5)}} = \dfrac{58}{124} = \dfrac{29}{62}$

Dividiendo en base 4

29×4 $\quad \underline{|62}$ $\Rightarrow 0,\widehat{213}_{(5)} = 0,13\ldots_{(4)}$

116 $\quad 0,13\ldots$

54×4 $\quad b=1$

216 $\quad a=3$

30×4

En (1) $313_{(5)} = \overline{cdef}_{(4)}$

$313_{(5)}$ a base 4

PROBLEMAS

15. Convertir $2221,[5]_{(16)}$ a la base 6. La suma de las cifras de la conversión es:

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 14

Resolución:

PROBLEMAS

16. Calcular:

$$E = \frac{4}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \frac{5}{7^4} + \ldots\ldots\ldots$$

A) 7/12 B) 11/16 C) 5/11
D) 5/16 E) 7/11

Resolución:

19. El número aval $1,[13]_n$ tiene como fracción que la origina: $\frac{31_n}{22_n}$. Halle n

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución:

PROBLEMAS

17. Si:

$$0{,}mnp[q] = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{243}+\frac{1}{2187}+\ldots\ldots,$$

además: $\dfrac{\overline{np}}{\overline{mq}} = [a;\ a;\ b;\ c;\ d]$

calcule: a + b + c + m + n + p + q

A) 28 B) 16 C) 18

D) 24 E) 32

Resolución:

PROBLEMAS

18. Calcule la diferencia de los términos de una fracción equivalente a “f”, si:

$$f = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{216} + \frac{1}{432} + \frac{1}{3\,888} + \frac{1}{46\,656} + \ldots$$

además dicha fracción tiene como suma de términos una cantidad que varía entre 1 000 y 1 200

A) 188 B) 94 C) 282
D) 47 E) 562

Resolución:

PROBLEMAS

20. Halle la suma de cifras del período que origina la fracción: $\frac{2^{6k+1}}{7}$, donde k es un entero positivo.

A) 23 B) 25 C) 27
D) 29 E) 31

Resolución:

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS